Z. Rechtsmedizin 69, 118—124 (1971)

Originalarbeiten — Original Papers

Zur Berechnung von Vaterschaftswahrscheinlichkeiten

G. Reissig *
Institut für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum (BRD)

Eingegangen am 15. Juni 1970

Calculation of Paternity Probabilities

Summary. The mathematical basis of procedures suitable for statistical evaluation of serological results is described. Some of the procedures are presently in use. The determination of probability of paternity is carried out using the classical definition of probability of Laplace and the theorem of Bayes. Furthermore random samples and the binomial distribution are considered. All methods are suitable if frequency of the corresponding biological attributes in the entire population is sufficiently low.

Zusammenfassung. Es werden die mathematischen Grundlagen von Verfahren beschrieben, die zur statistischen Auswertung von serologischen Befunden geeignet sind und die in der Praxis bereits angewandt werden. Für die Berechnung der Vaterschaftswahrscheinlichkeit werden einerseits die klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition von Laplace und das Bayessche Theorem, andererseits Zufallsstichproben und binomische Verteilung herangezogen. Alle Verfahren sind dann gut geeignet, wenn der Kindesvater über Eigenschaften verfügen muß, die in der Gesamtbevölkerung nur selten vorkommen.

Key-Words: Bayessches Theorem — Essen-Möller-Verfahren — Vaterschaftswahrscheinlichkeit, Berechnung.

Im Zusammenhang mit dem neuen Unehelichenrecht werden erbbiologische Gutachten auf Grund serologischer Befunde von den Gerichten häufiger als bisher zur Vaterschaftsfeststellung angefordert werden. Damit rücken auch die zugehörigen biostatistischen Verfahren erneut in den Blickpunkt des Interesses ([7—10, 12]).

Mit Hilfe von serologischen Untersuchungen läßt sich nur die Unmöglichkeit der Vaterschaft mit „an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit" beweisen. Von seiten der Gerichtsmedizin werden daher serologische Gutachten für einen positiven Vaterschaftsnachweis (=Nachweis, daß ein beklagter Mann wirklich der Vater ist) nicht anerkannt, sondern nur als zusätzliches Hilfsmittel verwendet (vgl. [1]). Der Bereich der serologischen Untersuchungsmöglichkeiten wurde jedoch laufend erweitert und dadurch der Kreis der in Frage kommenden Männer oft so weit eingeengt, daß der Gutachter in der Lage ist, dem Richter einen positiven Hinweis für die Vaterschaft eines beklagten Mannes zu geben. Dies geschieht durch Berechnung einer sog. „positiven Vaterschaftswahrscheinlichkeit", die auf unterschiedliche Weise definiert werden kann. Wir wollen uns hier

---

* Herrn Prof. Dr. Dr. W. Zimmermann aus Anlaß der Vollendung des 60. Lebensjahres am 19. 8. 1970 gewidmet.

mit den mathematischen Grundlagen der in der Praxis angewandten Verfahren beschäftigen. Einerseits handelt es sich dabei um das Bayessche Theorem bzw. den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff von Laplace und andererseits um die Gesetzmäßigkeiten von Zufallsstichproben. Die Bayessche Formel wurde schon vor mehr als 30 Jahren von Essen-Möller für die Berechnung von Vaterschaftswahrscheinlichkeiten vorgeschlagen (vgl. [2, 3, 6]) und hat sich seitdem in der Praxis bewährt. Mit einer „binomischen Methode“ hat sich als erster Zimmermann gemeinsam mit Stutz beschäftigt ([13, 14]); später verfolgten andere Autoren ähnliche Gedanken ([4]).

Um die mathematischen Modelle miteinander vergleichen zu können, wählen wir als Ausgangspunkt in allen Fällen die „unerläßliche väterliche Eigenschaft“ (uvE), die durch Vergleich von Mutter und Kind festgestellt wird und deren relative Häufigkeit p sich aus den bekannten Genotypen-Frequenzen für die einzelnen Merkmale leicht berechnen läßt.

Wir wollen uns zunächst den Ein-Mann-Fällen zuwenden. Nach Angabe von Essen-Möller befinden sich erfahrungsgemäß unter den benannten Männern genauso viele Väter wie Nichtväter, also unter $2m$ benannten Männern m Väter und m Nichtväter. Die Väter sind alle Träger der uvE, von den Nichtvätern dagegen nur mp. Der Begriff „Vaterschaftswahrscheinlichkeit“ (W) wird nun folgendermaßen definiert:

W = Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein benannter Träger der uvE wirklich Vater ist. (1)

Mit unseren Bezeichnungen ergibt sich

$$W = \frac{m}{m + m \cdot p} = \frac{1}{1+p}. \tag{2}$$

Für die „Irrtumswahrscheinlichkeit“ (I) gilt

I = Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein benannter Träger der uvE Nichtvater ist. (3)

Die Formel lautet entsprechend

$$I = \frac{m \cdot p}{m + m \cdot p} = \frac{p}{1+p} = 1 - W. \tag{4}$$

Wir haben hier die Formeln in der klassischen Laplaceschen Form als

$$\frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}}$$

angegeben. Zum besseren Verständnis sei Formel (2) noch einmal anhand des Bayesschen Ansatzes hergeleitet. Dazu wählen wir die folgenden Bezeichnungen:

E = Ereignis, daß ein Mann Merkmalträger ist (d.h. Träger der uvE),

A_1 = Ereignis, daß ein Mann Vater ist,

A_2 = Ereignis, daß ein Mann Nichtvater ist.

Nach Bayes ist

$$W = P(A_1 | E) = \frac{P(A_1) \cdot P(E|A_1)}{P(A_1) \cdot P(E|A_1) + P(A_2) \cdot P(E|A_2)}.$$

In unserem Falle sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$,

$P(E|A_1) = 1$ (=Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Vater Merkmalträger ist),

$P(E|A_2) = p$ (=Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Nichtvater Merkmalträger ist) und somit

$$W = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot p} = \frac{1}{1+p}.$$

Das andere Verfahren, von Stutz und Zimmermann als „binomische Methode" bezeichnet, geht nicht wie das eben beschriebene von einer großen Anzahl von gleichartigen Vaterschaftsprozessen aus, sondern vergleicht eine vorliegende Situation mit den Verhältnissen in der zugrundeliegenden Gesamtheit, d.h. die in einen bestimmten Vaterschaftsprozeß verwickelten Männer werden als Stichprobe aller Männer des Gebietes (etwa der Bundesrepublik) betrachtet.

Die zugrundeliegende Modellvorstellung ist die folgende: In einer Urne befinden sich zwei Sorten von Kugeln, zum Beispiel weiße und schwarze, deren zahlenmäßige Anteile bekannt sein sollen, sich also etwa wie $p:q$ verhalten sollen. Wenn wir rein zufällig eine Stichprobe vom Umfang n entnehmen, so werden darin entweder schwarze und weiße oder nur schwarze oder nur weiße Kugeln enthalten sein. Sind in einer Urne nur ganz wenig weiße Kugeln vorhanden, so ist es sehr unwahrscheinlich, daß wir bei einem einmaligen Versuch nur weiße Kugeln herausgreifen.

Den gleichen Gedankengang führen wir nun für unser Vaterschaftsproblem durch. Anstelle der Urne mit Kugeln haben wir eine Gesamtheit von Männern, die entweder Träger der uvE sind oder nicht. Wir wissen, daß Männer mit der uvE mit der Wahrscheinlichkeit p vorkommen und demnach entsprechend die Nicht-Merkmalträger mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Uns interessiert jetzt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, in einer Stichprobe vom Umfang n eine bestimmte Anzahl von Merkmalträgern zu finden. Die Antwort gibt uns der binomische Satz. Er lautet:

In einer Zufallsstichprobe vom Umfang n sind mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$w(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \tag{5}$$

x Merkmalträger anzutreffen.

Betrachten wir zunächst den Fall $n = 1$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein *zufällig* aus der Gesamtheit herausgegriffener Mann Träger der uvE ist, beträgt p. Nehmen wir einmal an, es sei $p = 0{,}001$. Dann ist nur einer von 1000 Männern Merkmalträger. Es ist also sehr unwahrscheinlich, daß irgendein nach Zufallsprinzipien ausgewählter Mann Träger der uvE ist. Wenn in einem Vaterschaftsprozeß nur ein Mann benannt ist und außerdem Träger einer so seltenen uvE ist, dann ist es sehr unwahrscheinlich, daß er zu Unrecht in Anspruch genommen wird. Auf solchen Überlegungen beruhen die Definitionen für Irrtumswahrscheinlichkeit und Vaterschaftswahrscheinlichkeit bei der binomischen Methode.

Wenn in allen eben geschilderten Fällen die Vaterschaft als erwiesen angesehen würde, so würde in 0,1% eine falsche Entscheidung getroffen, d.h. wir können die Irrtumswahrscheinlichkeit angeben als

$$I = p \tag{6}$$

und die Vaterschaftswahrscheinlichkeit definieren als

$$W = 1 - p = q \tag{7}$$

(vgl. auch [2]).

Ganz allgemein definieren wir

Vaterschaftswahrscheinlichkeit
= Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer Zufallsstichprobe vom Umfang n kein Träger der uvE zu erwarten ist, (8)

Irrtumswahrscheinlichkeit
= Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer Zufallsstichprobe vom Umfang n mindestens ein Merkmalträger ist. (9)

Die entsprechenden Formeln lauten:

$$W = q^n = (1 - p)^n \tag{10}$$

und

$$I = 1 - q^n. \tag{11}$$

Wir müssen uns immer wieder vor Augen halten, daß die mathematischen Gesetzmäßigkeiten nur für Zufallsauswahl gelten. Nur dann kann man Angaben über die Genauigkeit der Ergebnisse machen. Die in einen Vaterschaftsprozeß verwickelten Männer bilden keine Zufallsstichprobe, lediglich die Nichtväter können als „zufällig" benannt angesehen werden. Wir vergleichen die am Prozeß beteiligten Männer mit einer (gedachten) Zufallsstichprobe gleichen Umfangs und stellen dadurch fest, ob alle benannten Männer als zufällig ausgewählt (d.h. als Nichtväter) gelten können oder ob der wahre Vater gefunden worden ist.

Soll mit mathematischen Methoden eine medizinische Fragestellung geklärt werden, so muß als erstes ein Versuchsplan aufgestellt werden. Das gilt nicht nur für Experimente, sondern auch für Beobachtungen. Wenn also aus einer Gesamtheit eine Zufallsstichprobe vom Umfang n entnommen werden soll, muß vorher ein Plan aufgestellt werden, nach dem jedes Element der Grundgesamtheit die gleiche Chance hat, in die Stichprobe zu gelangen. Dieser Fall liegt hier nicht vor. Die Auswahl ist nicht nach einem Plan vorgenommen worden, trotzdem hat der Zufall dabei eine Rolle gespielt.

Das Wort „Zufall" hat in der Mathematik die gleiche Bedeutung wie im täglichen Leben. Es hängt vom Zufall ab, ob einer Frau ein Mann mit der Blutgruppe A oder B oder 0 oder AB begegnet. Diese Frage stellen wir uns aber

Tabelle. *Vaterschaftswahrscheinlichkeiten*

	$n=1$	$n=1,2$	$n=2$	$n=3$		$n=4$	
p \ W	$1-p$	$\frac{1}{1+p}$	$(1-p)^2$	$(1-p)^3$	$\frac{1}{1+2p}$	$(1-p)^4$	$\frac{1}{1+3p}$
0	1	1	1	1	1	1	1
0,001	0,999	0,9990	0,9980	0,9970	0,9980	0,9960	0,9970
0,01	0,99	0,9901	0,9801	0,9703	0,9804	0,9606	0,9709
0,017	0,983	0,9833	0,9663	0,9499	0,9671	0,9337	0,9515
0,1	0,9	0,9091	0,81	0,729	0,8333	0,6561	0,7695
0,3	0,7	0,7692	0,49	0,343	0,6250	0,2401	0,5263
0,5	0,5	0,6667	0,25	0,125	0,5	0,0625	0,4
0,8	0,2	0,5556	0,04	0,008	0,3846	0,0016	0,2941
1	0	0,5	0	0	0,3333	0	0,25

nicht. Wir suchen den Vater eines Kindes, also einen ganz bestimmten Mann, den wir nicht durch Zufall finden können, sondern systematisch ermitteln müssen. Das bedeutet: Nur die Nichtväter können als Zufallsstichprobe aus der Grundgesamtheit betrachtet werden.

Stutz und Zimmermann [10] ziehen auch nichtbenannte Männer in die Untersuchung ein, d.h. sie wählen n größer als die Anzahl der benannten Männer und setzen voraus, daß das Verhältnis Väter:Nichtväter gleich $1:(n-1)$ ist. Die Formel (2), die ja für gleiche Anzahlen von Vätern und Nichtvätern aufgestellt worden war, kann entsprechend auch für das Verhältnis $1:(n-1)$ abgeleitet werden und lautet dann

$$W=\frac{1}{1+(n-1)\,p}. \tag{12}$$

Aus (4) folgt analog

$$I=\frac{(n-1)\,p}{1+(n-1)\,p}. \tag{13}$$

In der Tabelle sind die Vaterschaftswahrscheinlichkeiten — nach den Formeln (2), (7), (10) und (12) berechnet — einander gegenübergestellt worden.

Da die uvE in jedem Falle in der zugrundeliegenden Gesamtheit vorhanden sein muß, es aber unmöglich ist, daß sie bei jedem auftritt, können die Grenzfälle $p=0$ und $p=1$ nicht vorkommen. Sie sind in der Tabelle nur zum Vergleich angegeben.

Für $p=0$ erhalten wir in allen Fällen $W=1$. Das ist sinnvoll; denn wenn die geforderte Eigenschaft so selten ist, daß sie praktisch überhaupt nicht vorkommt, dann muß derjenige, der sie besitzt, unbedingt der Vater sein.

Für $p=1$ führen die Verfahren zu verschiedenen Ergebnissen.

Im Falle der Binomialmethode ergibt sich für alle n die Vaterschaftswahrscheinlichkeit $W=0$. Das bedeutet: Bei einer Eigenschaft, die jeder besitzt, ist die Vaterschaftswahrscheinlichkeit für den einzelnen gleich 0, d.h. es kann keine Aussage gemacht werden, da jeder Mann als Vater in Betracht kommen könnte.

Bei den anderen Verfahren wird $W = 0$ erst für $n \to \infty$. Dort wird von vornherein das Verhältnis Väter:Nichtväter festgelegt als 1:1 bzw. $1:(n-1)$. Bei $n = 3$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig herausgegriffener Mann ein Vater ist, gleich $\frac{1}{3}$ und bei $n = 4$ gleich $\frac{1}{4}$.

Stets gilt:

je kleiner p — desto größer W,

d.h. je seltener eine Eigenschaft ist, desto besser ist sie zum positiven Vaterschaftsbeweis geeignet.

Ferner gilt:

je größer n — desto kleiner W,

d.h. je mehr Männer benannt werden, desto schwieriger ist es, den wirklichen Vater festzustellen.

Für kleine Werte von p liegen die vergleichbaren Werte nahe beieinander, für größere Werte von p gilt das nicht mehr. Die angegebenen Verfahren sind dann nicht ausreichend für einen positiven Vaterschaftsnachweis.

Zusätzliche Probleme tauchen auf, wenn mehrere Männer als Vater in Betracht kommen (vgl. [3, 12]). Beim binomischen Verfahren besteht dann die Möglichkeit, vgl. [11], nicht das p der Grundgesamtheit zu verwenden für die geforderte uvE, sondern die nachgewiesenen Eigenschaften des Eventualvaters zu berücksichtigen und beispielsweise zwischen homozygoten und heterozygoten Genen zu unterscheiden. Dann ergeben sich unterschiedliche Vaterschaftswahrscheinlichkeiten, die unter Umständen dem Richter — sofern er noch weitere Hinweise vorliegen hat — die Entscheidung erleichtern.

Literatur

1. Brühl, G.: Unterhaltsrecht. Gieseking-Bielefeld: Deutscher Heimat-Verlag 1960.
2. Essen-Möller, E.: Die Beweiskraft der Ähnlichkeit im Vaterschaftsnachweis; theoretische Grundlagen. Mitt. anthrop. Ges. (Wien) **68**, 9 (1938).
3. — Quensel, C.W.: Zur Theorie des Vaterschaftsnachweises auf Grund von Ähnlichkeitsbefunden. Dtsch. Z. ges. gerichtl. Med. **31**, 70 (1939).
4. Fiedler, H., Hoppe, H.H., Pettenkofer, H.J.: Ein neuer Weg zum „positiven Vaterschaftsbeweis" über die statistische Auswertung serologischer Befunde. Bundesgesundheitsblatt **11**, 9/10, 129—135 (1968).
5. — — — Schlußwort (zur Diskussion um 4.). Bundesgesundheitsblatt **11**, 21, 311—312 (1968).
6. Hummel, K.: Die medizinische Vaterschaftsbegutachtung mit biostatistischem Beweis. Stuttgart: Gustav Fischer 1961.
7. — Die Anwendung des biostatistischen Vaterschaftsnachweises durch die Blutgruppengutachter in der BRD. Dtsch. Z. ges. gerichtl. Med. **61**, 37—40 (1967).
8. — Der Blutgruppensachverständige und das kommende Unehelichengesetz. Dtsch. Z. ges. gerichtl. Med. **64**, 115—123 (1968).
9. — Biometrie der Abstammung (Zum biostatistischen Vaterschaftsbeweis). Meth. Inform. Med. 8, 159—165 (1969).
10. — Zum biostatistischen Vaterschaftsbeweis aufgrund von Blutgruppenbefunden. Bundesgesundheitsblatt **12**, 379—383 (1969).

11. Mannebach, H., Zimmermann, W.: Bemerkungen zu 4. Bundesgesundheitsblatt **11**, 310—311 (1968).

12. Schulte-Mönting, J., Hummel, K.: Über die Berechnung der Vaterschaftswahrscheinlichkeit bei Fällen mit mehr als einem im Blutgruppengutachten nicht ausgeschlossenen Mann. I. Mitteilung: Theoretische Grundlagen. Z. Immun.-Forsch. Allerg. klin. Immunol. **138**, 295—298 (1969).

13. Stutz, H.R., Zimmermann, W.: Ein Beitrag zum Problem der Berechnung der Vaterschaftswahrscheinlichkeit bei blutgruppenserologischen Vaterschaftsgutachten. Z. Immun.-Forsch. **119**, 479—487 (1960).

14. — — Die Anwendung der Binomischen Methode bei der Berechnung der Vaterschaftswahrscheinlichkeit. Z. Immun.-Forsch. **120**, 161—172 (1960).

Dr. Gisela Reißig
Institut für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum
D-4630 Bochum-Querenburg, Buscheystr.